Uitwerking 3-1

Eén-op-één: we moeten aantonen dat als $\cos 2t \cos t = \cos 2s \cos s$ en $\cos 2t \sin t = \cos 2s \sin s$, dan $s = t$. (De omgekeerde implicatie is triviaal.) Als we de tweede vergelijking op de eerste delen krijgen we $\sin t / \cos t = \sin s / \cos s$, oftewel $\tan t = \tan s$. Samen met de eis dat $\frac{\pi}{4} \leq s, t < \frac{3\pi}{4}$ volgt nu dat $s = t$.
Gesloten: door invullen kun je controleren dat $\gamma(\frac{\pi}{4}) = \gamma(\frac{3\pi}{4})$. Dit is reeds voldoende, zie p. 372 van het boek.

Uitwerking 3-2

Om de gevraagde integraal te berekenen gebruiken we de stelling van Green (of Stokes; dit maakt weinig uit omdat Stokes een generalisatie is van Green, en Green is het speciale geval van twee dimensies, en dat is juist het geval waarmee we hier te maken hebben). Schrijf het vectorveld als $P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ en noteer het door γ omsloten gebied met D. De door γ beschreven kromme is dan de rand ∂D.

Stap 1: Stelling van Green
Nu levert Green dat de gevraagde integraal gelijk is aan $\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$, waar dA een oppervlakte-elementje is. Voor onze P en Q vinden we na enig rekenwerk, waarin veel fouten werden gemaakt, dat $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$. Dus we hebben de gevraagde integraal gereduceerd tot $\int\int_D 2 dA = 2 \int\int_D dA = 2 \times$ oppervlakte van D. Bijna iedereen liet het bij deze conclusie (met of zonder rekenfout), maar als er om de evaluatie van een integraal gevraagd wordt mag er in het antwoord natuurlijk geen integraalteken of "oppervlakte van" voorkomen.

Stap 2: Oppervlaktebepaling van het door γ omsloten gebied
Gevraagd is dus de oppervlakte van D, waarbij D het door γ omsloten gebied is. Er zijn twee manieren om deze te bepalen. De eerste is de formule uit §6.2 van het boek: oppervlakte $D = \int_\gamma x dy - y dx$. Dit is een lijnintegraal waarin we de gegeven formules $x(t) = \cos 2t \cos t$ en $y(t) = \cos 2t \sin t$ moeten substitueren. Dit levert

$$\int_\gamma x\, dy - y\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos 2t \cos t \,\mathrm{d}(\cos 2t \sin t) - \cos 2t \sin t \,\mathrm{d}(\cos 2t \cos t)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos 2t \cos t)^2\, dt - 2 \cos 2t \sin 2t \cos t \sin t\, dt + (\cos 2t \sin t)^2\, dt + 2 \cos 2t \sin 2t \cos t \sin t\, dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 2t\, dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4t\, dt = \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{8} \sin 4t\, \right]_{t=\frac{\pi}{4}}^{t=\frac{3\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Hiermee is de opgave opgelost.

Alternatieve stap 2: Gebruik poolcoördinaten
De tweede manier is het invoeren van poolcoördinaten. We zien namelijk dat de kromme γ kan worden gegeven als de polaire voorstelling $r = \cos 2\theta$. (Deze observatie had ook kunnen helpen bij opgave 3-1.) De dubbelintegraal $2 \int\int_D dA$ kan dus door overgang op poolcoördinaten worden berekend als $2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta$. Hierbij is de "$r$" de Jacobiaan behorende bij de overgang op poolcoördinaten. Deze integraal is eenvoudig terug te brengen tot de vorm $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2 2t\, dt$, en de evaluatie van deze vorm verloopt zoals boven.